

TOTUL ESTE NUMĂR

Realitatea este matematică?

MANUEL ALFONSECA

Traducere de Liviu Ornea

CUPRINS

Capitolul 0

Surprinzătoarea poveste a numărului π	9
Descoperirea lui π	10
<i>Când și cum a apărut simbolul π?</i>	12
A calcula fără a măsura	14
<i>La ce servește calculul cifrelor lui π?</i>	16
Secretul piramidelor	20
Atunci, chiar există π cu adevărat?	24

Capitolul 1

Pitagora și matematikoi	29
<i>Celebra teoremă a lui Pitagora</i>	32
Muzică și numere	34
Totul e număr	39
<i>Existența numerelor iraționale</i>	40
<i>Existența a cinci, și numai cinci, poliedre regulate convexe</i>	46

Capitolul 2

Platon și ideile	49
Cosmologia platonice	51
Aristotel contra Platon	55
<i>Un exemplu concret pentru metoda abducției</i>	60
Nominalism printre greci?	62
<i>Ideile politice ale lui Platon și Aristotel</i>	64

Capitolul 3

Problema universalilor: realism și nominalism	67
Relații de echivalență și clasificări	68
<i>Categoriile lui Aristotel</i>	69
Problema universalilor	72
Câteva exemple de universalii	76
Nominalism și realism în modernitate	78
<i>Cele trei legi ale lui Kepler</i>	82

Capitolul 4

Dezbaterea din zilele noastre: secolele XX și XXI	89
Teoremele de incompletitudine ale lui Gödel	89
<i>Demonstrația informală a primei teoreme de incompletitudine a lui Gödel</i>	92
„Mintea cea nouă a împăratului”	97
Eficacitatea nerezonabilă a matematicii	99
Încă un argument nominalist împotriva realismului platonic	103
În loc de încheiere	103

Capitolul 5

Nerezonabila eficacitate a științei	105
Sunt adevărate teoriile științifice?	105
Dezbaterea despre realism și antirealism	108
<i>Eterna căutare a fundamentelor materiei</i>	110
Argumente realiste: metoda științifică	110
Argumente realiste: argumentul fără miracole	113
Ce e o teorie științifică?	119
Pot fi adevărate teoriile științifice?	121
<i>Modelul standard al cosmologiei</i>	122

Concluzie	127
Anexe	129
ANEXA 1. Ecuatiile lui Maxwell	129
ANEXA 2. Specia biologică între universalii	131
ANEXA 3. Ecuația cosmologică a lui Einstein și expansiunea universului	133
Lecturi recomandate	139
Cărți	140
Resurse web	141

Capitolul 0

Surprinzătoarea poveste a numărului π

Să presupunem că a mia zecimală a lui π ar fi 9... Întrebarea e: era adevărată prima afirmație a acestui paragraf înainte de descoperirea din 1949? [Cititorul va găsi răspunsul în acest capitol.] Pentru susținătorii școlii realiste, enunțul exprimă un adevărat atemporal, indiferent dacă e sau nu cunoscut... [Alții] preferă să creadă că obiectele matematice sunt lipsite de orice realitate independentă de mintea umană.

(Martin Gardner, 1914–2010)¹

Obiectivul acestei cărți e bine ilustrat de fragmentul citat mai sus din Martin Gardner. Există două feluri diferite de a gândi concepția ontologică a matematicii: conform primeia, ideile și concepțiile matematice sunt reale, adică există dincolo de mintea noastră; pentru cea de-a doua, nu sunt altceva decât construcții mentale ale omului. Înainte de a ne îmbarca într-o istorisire riguros cronologică, o să ne oprim asupra poveștii numărului π , acesta fiind modul cel mai bun de a intra în această dezbatere.

De-a lungul istoriei, cele două concepții filosofice despre raportul dintre matematică și realitate au alternat. Cum nu avem intenția să convingem pe cineva, nu vom adopta niciuna dintre poziții în cartea asta. Ne vom mărgini la prezentarea argumentelor ambelor viziuni și vom lăsa cititorul să-și formuleze propriile concluzii.

¹ M. Gardner, *Gardner's Whys and Wherefores*, University of Chicago Press, 1989.

Descoperirea lui π

Una dintre primele descoperiri matematice ale omenirii constă în recunoașterea faptului că raportul dintre perimetrul cercului (numit, de obicei, circumferință) și diametrul său, indiferent de dimensiunea cercului respectiv, e mereu același: circumferința e un pic mai lungă decât triplul diametrului. Ca să fim preciși, de 3,141 592 653 589 793 238 46... ori mai mare, unde punctele de suspensie indică faptul că cifrele zecimale continuă la infinit.

De când știm asta? Din vremuri imemorabile, probabil de vreo cinci mii de ani; sau, poate, nu chiar de-atunci. O să vedem în capitolul acesta.

Probabil că vechii constructori și arhitecți egipteni au încercat, din motive practice, să afle lungimea unei circumferințe. Edificii cu plan circular se construiesc de multe secole. Astăzi, să măsurăm o linie dreaptă e simplu: ai nevoie doar de o riglă, de exemplu, o bucată lungă de lemn bine șlefuit pe marginea căreia să fi trasat semne echidistante. Nu e nicio îndoială că rigla a fost unul dintre primele instrumente de măsură inventate. Dar cum măsurăm lungimea unei circumferințe? Cu rigla nu-i ușor, pentru că lemnul nu e destul de flexibil ca să se adapteze la conturul unui cerc.

O soluție posibilă, la care sigur s-au gândit constructorii antici, ar fi următoarea: se ia o sfoară suficient de lungă și se înfășoară pe circumferința de măsurat, notând cu grijă punctul în care sfoara se suprapune peste punctul de plecare. Apoi se întinde sfoara și i se măsoară lungimea cu rigla până la punctul însemnat înainte. Diametrul, însă, e mai ușor de măsurat: se poate folosi rigla.

Nu știm cine a fost primul care-a avut ideea împărțirii circumferinței la diametrul său și a repetării acestei operații cu cercuri de diferite dimensiuni. În orice caz, oricine ar fi fost, va fi fost, cu siguranță, surprins constatând că raportul era mereu același indiferent de dimensiunea cercului. Fără îndoială, va fi dedus imediat că nu mai era nevoie să folosească sfoara pentru a măsura circumferința, era de

ajuns să măsoare diametrul (ceea ce, am văzut, era foarte ușor) și să înmulțească rezultatul cu raportul constant care leagă cele două lungimi, raport care e cam 3,14. Iar asta e adevărat pentru orice unitate de măsură, inclusiv pentru aceea folosită atunci: cubitul egiptean, de exemplu, avea o lungime de 52 cm. Independent de măsura folosită, raportul dintre aceste două lungimi e invariabil. Astfel, dacă diametrul unui cerc e de 1 metru, circumferința sa va fi de 3,14... metri; în timp ce, dacă măsura lui e de 1 cubit egiptean, atunci circumferința va avea o măsură echivalentă cu 3,14... cubiți egipteni.

Știau înaintașii noștri să calculeze cu zecimale? Răspunsul e nu. Calculau numai cu numere întregi. Sigur, cunoșteau și foloseau fracțiile, dar numărătorul fracțiilor (cu o singură excepție) era întotdeauna egal cu 1. Una peste alta, lucrau numai cu numere întregi și cu fracțiile lor inverse. Excepția era fracția $2/3$ care era destul de folosită.

Opera matematică cea mai celebră din toată literatura egipteană e papyrusul lui Rhind, despre care se estimează că ar data din secolul al XIX-lea î.Hr., adică de acum 4000 de ani. Printre altele, în acest papyrus apare următoarea aproximare a valorii raportului dintre circumferință și diametrul său:

$$16 \times 16 \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3,160\ 49 \dots$$

Oricum, o valoare aproximativă care depășește valoarea reală cu 0,6%, sau, cu alte cuvinte, cu o parte la fiecare 166. Nu e rău, mai ales dacă ținem seama de cât de rudimentar era sistemul lor numeric.

Dar să revenim la matematicienii Antichității. Odată cu trecerea timpului și cu perfecționarea sistemelor de numerație, s-au obținut aproximații din ce în ce mai precise ale valorii lui π . Timp îndelungat, s-a folosit fracția $22/7 = 3,142857\dots$, care e foarte simplă și deloc rea, dată fiind eroarea prin exces față de valoarea reală de numai 0,04%, altfel spus e o parte la fiecare 2500; mai mult decât de ajuns pentru orice aplicație practică.

CÂND ȘI CUM A APĂRUT SIMBOLUL π ?

Simbolul π (se pronunță pi) își are originea în litera alfabetului grec. De ce îl numim așa? Explicația e simplă: la începutul secolului al XVII-lea, matematicianul englez **William Oughtred** (1574–1660) a introdus mai multe simboluri ca să simplifice notația matematică. De exemplu, a fost primul care a reprezentat înmulțirea cu semnul $\times$ și a folosit prescurtările *sin* și *cos* pentru a indica funcțiile *sinus* și *cosinus*. Tot el e creditat și cu inventarea riglei de calcul.

Ca să reprezinte relația dintre circumferința și diametrul unui cerc, a folosit simbolul π/δ , unde π este prima literă a cuvântului grecesc perimetru, care înseamnă *măsura învelișului*, iar δ e prima literă a cuvântului grecesc diametru, care înseamnă *măsură prin*. Adică raportul dintre circumferință și diametru.

Matematicienii au tendința să simplifice formulele de câte ori e posibil și, pentru asta, atribuie valori speciale anumitor variabile. De exemplu, deoarece relația dintre circumferința (sau perimetrul) unui cerc și diametrul lui e mereu aceeași, indiferent de cerc, de ce să nu simplifice formula, aplicând-o unui cerc cu diametrul egal cu 1? E ușor să împarți cu 1, pentru că rezultatul e egal cu deîmpărțitul. Astfel, dacă diametrul cercului e egal cu 1, atunci π/δ va fi egal cu π . În 1737, matematicianul elvețian Leonhard Euler a fost unul dintre primii care au folosit simbolul π pentru a reprezenta raportul dintre circumferința și diametrul unui cerc. Azi încă îi urmăm exemplul.

Totuși, e bine să amintim că valoarea exactă a lui π nu va putea fi cunoscută niciodată, deoarece conține o infinitate de cifre care nu se repetă cu regularitate. De aceea, va fi posibil să obținem aproximații din ce în ce mai bune, dar la valoarea exactă nu vom putea ajunge.

Figura 1. William Oughtred
(1574–1660), gravură din
secolul al XVII-lea.



Dar să vedem pe un exemplu ce înseamnă să folosim aproximații din ce în ce mai precise ale lui π . Știm că, potrivit primei definiții a metrului, circumferința Pământului măsoară 40 000 de kilometri. Dacă vom considera Pământul drept o sferă perfectă, cu o circumferință egală cu cea a meridianului care trece prin Paris, îi putem calcula diametrul în kilometri împărțind 40 000 la π . Folosind valoarea

reală a lui π , vom obține 12 732,395 km. Dacă, însă, facem calculul folosind aproximația lui egală cu $22/7$, obținem 12 727,272 km, adică o eroare de doar 5 km la o distanță atât de mare.

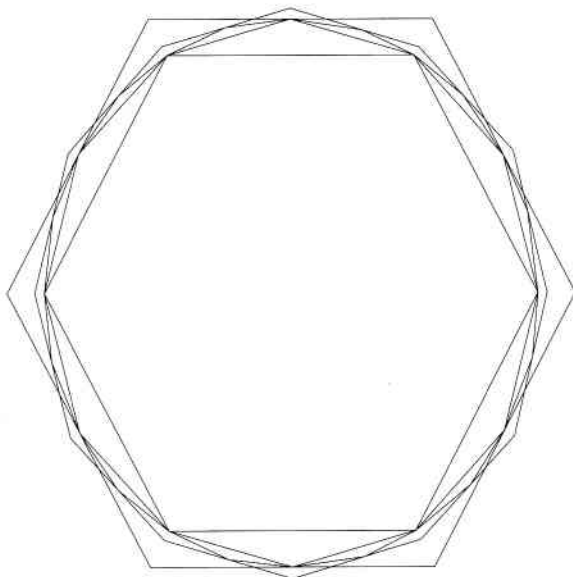
A calcula fără a măsura

Au venit apoi grecii și au revoluționat întreaga cunoaștere umană. Printre altele, au avut ideea năstrușnică să deducă proprietățile figurilor geometrice numai cu mintea, adică în mod abstract, fără să recurgă la riglă și sfoară pentru a măsura. Exact din acest motiv, **Euclid din Alexandria** (cca. 325 – cca. 265 î.Hr.) e considerat fondatorul geometriei, pentru că a ajuns la rezultate folosind numai raționamentul, fără măsurători care, inevitabil, furnizează rezultate imprecise ale căror erori se transmit calculelor succesive. Euclid a fost primul care a demonstrat (dincolo de observație) că raportul dintre lungimea unui cerc arbitrar și diametrul său e mereu același. Astfel a demonstrat că ariile cercurilor sunt proporționale cu pătratul diametrelor lor. Cu toate acestea, Euclid nu a calculat valoarea lui π .

Pe aceeași linie, **Arhimede din Siracusa** (cca. 287 – cca. 212 î.Hr.) s-a apucat să calculeze valoarea lui π folosind niște raționamente simple. Pentru aceasta, a inventat așa-numita „metodă exhaustivă” care funcționează după cum urmează:

1. Să considerăm un cerc ideal al cărui diametru e egal exact cu 1 (după cum știm, unitatea de măsură nu contează). Lungimea circumferinței lui va fi, deci, egală cu π .
2. Înscriem un hexagon regulat în cerc, deci vârfurile hexagonului stau pe circumferința cercului. E ușor de văzut că perimetrul hexagonului e egal cu 3 (de 3 ori diametrul cercului).
3. Acum desenăm hexagonul regulat circumscris cercului: în acest fel, mijloacele laturilor sale ating circumferința cercului și o parte din suprafața poligonului rămâne în afara ariei cercului. Nu e greu

Figura 2. Metoda exhaustivă folosită de Arhimede pentru a calcula o aproximație a lui π .



de calculat perimetrul acestui hexagon: e cu puțin mai mare decât 3,4 (de 3,4 ori diametrul cercului).

4. Se observă pe figură că circumferința e cuprinsă între perimetrul hexagonului înscris și perimetrul hexagonului circumscris, astfel că, folosind logica, știm că valoarea sa va fi cuprinsă între 3 și 3,4. Nu pare o aproximație satisfăcătoare, dar e doar primul pas.
5. La pasul succesiv repetăm operația de mai sus, dar acum folosim un poligon cu 12 laturi (un dodecagon), unul înscris în circumferință și altul circumscris ei. Acum valoarea lui π e cuprinsă între perimetrele celor două dodecagoane, ceea ce permite o aproximație a valorii ei cu numere și mai apropiate.
6. Se construiesc apoi poligoanele înscrise și circumscrise cu 24 de laturi fiecare. Ca să fie mai clar, în figură am desenat numai poligonul înscris. Arhimede a repetat operația încă de două ori, întâi cu un poligon cu 48 de laturi, apoi cu unul cu 96 de laturi.

LA CE SERVEȘTE CALCULUL CIFRELOR LUI π ?

O aproximare a lui π cu zece cifre zecimale, adică 3,141 592 653 6, este, pentru toate scopurile practice, mai mult decât suficientă. De altfel, dacă am folosi-o pentru a calcula diametrul Pământului bazându-ne pe circumferința lui, eroarea nu ar depăși 40 de micrometri. Are cineva nevoie de precizie mai mare? Atunci, de ce ne pierdem vremea calculând cât mai multe zecimale ale lui π .

Unul dintre motivele pentru care s-a continuat calcularea zecimalelor lui π a fost pentru a aplica acele cifre la testele statistice aleatorii. Într-adevăr, cifrele lui π par să fie aleatorii, în sensul că orice șir de numere care ne vine-n minte va apărea printre zecimalele lui π în număr invers proporțional cu lungimea șirului. Să vedem câteva exemple:

- Dacă cifrele lui π satisfac condiția de a fi aleatorii, fiecare dintre ele va apărea, în orice șir al lui π de mărime arbitrară, cu o frecvență aproximativă de 10%. Dacă considerăm, de exemplu, primul miliard de cifre ale lui π , fiecare număr va trebui să apară cam de o sută de milioane de ori. Să vedem de câte ori apar: 0 (99 993 942); 1 (99 997 334); 2 (100 002 410); 3 (99 986 911); 4 (100 011 958); 5 (99 998 885); 6 (100 010 387); 7 (99 996 061); 8 (100 001 839); și 9 (100 000 273).
- La fel se întâmplă cu cele 100 de secvențe de câte două cifre (de la 00 la 99), fiecare dintre ele apare cam de 10 milioane de ori.

7. Studiind perimetrul poligoanelor cu 96 de laturi, Arhimede a obținut două fracții, una mai mare și una mai mică, între care se află valoarea exactă a lui π . Frația mai mare e cea pe care o cunoaște deja: $22/7 = 3,142857\dots$, în timp ce aceea mai mică e: $223/71 = 3,140845\dots$

- Principiile aleatorii care guvernează sunt satisfăcute și cu secvențe de trei cifre (de la 000 la 999), fiecare dintre ele apărând de circa un milion de ori.
- Și așa mai departe.

Dacă cifrele lui π satisfac condițiile aparițiilor aleatorii, așa cum am văzut până acum, avem dreptul să presupunem că și valoarea lui π e aleatorie. Nimic mai departe de realitate. Există o altă măsură, complexitatea lui Kolmogorov, care analizează cât e de aleatoriu un număr verificând până la ce punct poate fi el comprimat. Valoarea lui π se poate comprima enorm, pentru că orice algoritm folosit ca să-i calculăm oricâte miliarde de zecimale e mult mai scurt decât numărul π și îl reprezintă cu exactitate (mai bine zis, l-ar reprezenta cu exactitate dacă l-am lăsa să funcționeze la infinit). Astfel că π ne confruntă cu o aparentă contradicție: cifrele sale par să fie aleatorii, dar nu sunt așa, deoarece valoarea sa e absolut deterministă.

Informaticienii sunt interesați să calculeze cifrele lui π pentru a verifica eficiența diferitelor tipuri de calculatoare. Efectiv, e posibil să fie puse la încercare măsurând numărul de cifre exacte ale lui π care pot fi calculate într-un interval de timp dat, folosind același algoritm. Se pot verifica și diverși algoritmi rulându-i în același computer.

În fine, calculul lui π se folosește și ca test pentru a vedea dacă un computer nou funcționează corect, fără erori. Calculul zecimalelor lui π are, așadar, mai multe aplicații decât am fi crezut.

8. În fine, calculând media celor două fracții dinainte, Arhimede a obținut o aproximație și mai bună, al cărei rezultat e echivalent cu $3123/994 = 3,141851\dots$, cu o eroare față de valoarea reală care, în acest caz, corespunde unei părți la fiecare 12 155, aproape de cinci ori mai exactă decât fracția $22/7$. Reluând calculul diametrului